Devoir maison n° 12

À rendre le lundi 24 mars

Extrait d'un rapport du jury du CCINP : « *Le futur candidat doit s'appliquer à donner tous les arguments, même simples, conduisant à une conclusion. Nous lui conseillons de s'approprier petit à petit le cours par la pratique des exercices et des problèmes, de travailler les techniques habituelles et surtout de s'entraîner régulièrement à rédiger des questions de manière claire, explicite et structurée.* »

Exercice 1. (*d'après ATS 2021*)
Soit la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |\cos x| - |\sin x|$.

Q1. Montrer que f est périodique de période π.

Q2. Étudier la parité de f.

Q3. Justifier que pour tout $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = \cos x - \sin x$.

Q4. Calculer une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos x - \sin x = C\cos\Big(x + \frac{\pi}{4}\Big).$$

Pour la suite, on utilisera l'égalité :

$$\forall x \in \Big[0\,;\frac{\pi}{2}\Big],\ f(x) = C\cos\Big(x + \frac{\pi}{4}\Big).$$

Q5. Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$.

Q6. Montrer que la série de Fourier Sf de la fonction f peut s'écrire sous la forme

$$Sf(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2nx).$$

Q7. Étudier la convergence de la série de Fourier de la fonction f sur $\mathbb{R}$, en précisant le théorème utilisé et son énoncé.

Q8. Montrer que $a_0 = 0$.

Q9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que

$$a_n = \frac{4\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos\Big(t + \frac{\pi}{4}\Big)\cos(2nt)\,\mathrm{d}t.$$

Q10. Montrer que, pour tout entier naturel p, on a

$$a_{2p} = 0 \quad \text{et} \quad a_{2p+1} = \frac{8}{\pi\left[4(2p+1)^2 - 1\right]}.$$

Indication : on pourra utiliser l'égalité $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$.

Q11. Grâce à la question **Q7** et les calculs précédents, déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{4(2p+1)^2 - 1}$.

Q12. Énoncer le théorème de Parseval.

Q13. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{\left[4(2p+1)^2 - 1\right]^2}$.

Exercice 2. [Facultatif] (*d'après Centrale 2022*)
On note $\mathcal{C}^0_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, 2π-périodiques et continues sur $\mathbb{R}$.
Pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}^0_{2\pi}$, les coefficients de Fourier trigonométriques de f sont définis par

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$$

et, pour tout entier k dans $\mathbb{N}^*$,

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t, \qquad b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)\,\mathrm{d}t.$$

On va étudier le comportement asymptotique des coefficients de Fourier d'une fonction de $\mathcal{C}^0_{2\pi}$ supposée de classe $\mathcal{C}^1$.

À toute fonction $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$, on associe la suite $\big(c_k(f)\big)_{k\in\mathbb{Z}}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, définie par $c_0(f) = a_0(f)$ et, $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$c_k(f) = \frac{1}{2}\big(a_k(f) - \mathrm{i}b_k(f)\big), \qquad c_{-k}(f) = \frac{1}{2}\big(a_k(f) + \mathrm{i}b_k(f)\big).$$

Q1. Vérifier que $\forall k \in \mathbb{Z}$, $c_k(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t$.

La suite $\big(c_k(f)\big)_{k\in\mathbb{Z}}$ s'appelle la suite des *coefficients de Fourier exponentiels* de la fonction f.

Q2. *Question de cours* : citer le théorème de Parseval pour une fonction $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$.

Q3. Pour tout entier naturel k non nul, exprimer $\left|c_k(f)\right|^2$ et $\left|c_{-k}(f)\right|^2$ en fonction de $a_k^2(f)$ et $b_k^2(f)$ et, en utilisant le théorème de Parseval, démontrer que $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} c_k(f) = \lim_{k\to+\infty} c_{-k}(f) = 0$.

Pour les trois questions suivantes, f est une fonction 2π-périodique, de classe $\mathcal{C}^1$, à valeurs réelles.

Q4. Pour tout entier naturel k non nul, justifier l'existence de $a_k(f')$ et $b_k(f')$.

Q5. À l'aide d'intégrations par parties, démontrer que, pour tout entier naturel k non nul,

$$a_k(f') = kb_k(f) \quad \text{et} \quad b_k(f') = -ka_k(f).$$

En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$, $c_k(f') = \mathrm{i}kc_k(f)$.

Q6. En déduire que $\left|c_k(f)\right| \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{k}\right)$ et $\left|c_{-k}(f)\right| \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{k}\right)$.